Я. В. Никитина, А. Я. Султанов

**РАССЛОЕНИЕ ВЕЙЛЯ НАД ТЕНЗОРНЫМ
ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ АЛГЕБР ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

Аннотация. *Актуальность и цели.* Расслоения Вейля, начиная со времени их открытия в 1953 г., активно изучаются геометрами России, Японии, Чехии и других стран. Целью данной работы является построение естественных лифтов функций, 1-форм и векторных полей с базы в расслоения Вейля над тензорным произведением двух алгебр дуальных чисел. *Материалы и методы.* Для решения поставленных задач были использованы методы тензорной алгебры, теории линейных связностей. *Результаты.* Построено тензорное произведение двух алгебр дуальных чисел, получены структурные соотношения этой алгебры в специальном базисе, соотношения внешней операции умножения линейных форм на элементы тензорного произведения двух алгебр дуальных чисел, дано описание естественных лифтов функций с базы в изучаемые расслоения Вейля. Также введены естественные лифты векторных полей, структурные аффиноры для этих расслоений Вейля. Показано, как с помощью структурных аффиноров можно получить вертикальные лифты векторных полей из полного лифта векторного поля. В заключение построены естественные лифты 1-форм. *Выводы.* В работе приведены краткие сведения о расслоениях Вейля, естественных продолжениях функций с базы в расслоение Вейля, описаны вещественнозначные продолжения функций, векторных полей и 1-форм с базы в расслоение Вейля. Результаты исследования могут быть использованы при изучении лифтов линейных связностей с базы в расслоение Вейля над тензорным произведением алгебр дуальных чисел.

Ключевые слова: расслоения Вейля, алгебра дуальных чисел, векторное поле, ковекторное поле, лифты функций, лифты векторных полей, лифты ковекторных полей.

Ya. V. Nikitina, A. Ya. Sultanov

**WEIL BUNDLE OVER THE TENSOR PRODUCT
OF TWO ALGEBRAS OF DUAL NUMBERS**

Abstract. *Background.* Starting from the time of their discovery in 1953, Weil bundles have been actively studied by geometers of Russia, Japan, Czech Republic and other countries. The aim of this work is to construct the natural lifts of functions, 1-forms and vector fields from a base into Weil bundles over the tensor product of two algebras of dual numbers. *Materials and methods.* The methods of tensor algebra, theory of linear connections were used to achieve the objectives. *Results.* The authors constructed the tensor product of two algebras of dual numbers; the structural correlations of the algebra in a special basis, correlations of outer multiplication of linear forms on elements of the tensor product of two algebras of dual numbers were obtained; the description of the natural lifts of functions from a base into the studied Weil bundles was given. The natural lifts of vector fields, structural affinors for these Weil bundles were also introduced. It is shown how to obtain the vertical lifts of vector fields from the complete lift of a vector field with the help of available structural affinors. Finally, the natural lifts of 1-forms were constructed. *Conclusions.* The paper provides a summary of Weil bundles, natural extensions of functions

from a base into a Weil bundle. The real-valued extensions of functions, vector fields and 1-forms from a base into a Weil bundle are described. The research results can be used to study the lifts of linear connections from a base into a Weil bundle over the tensor product of the algebras of dual numbers.

Key words: weil bundles, the algebra of dual numbers, vector field, covector field, functions lifts, vector fields lifts, covector fields lifts.

Введение

Расслоения A -близких точек, где A – локальная алгебра в смысле А. Вейля, были введены А. Вейлем в 1953 г. [1]. Эти расслоения впоследствии были названы расслоениями Вейля. Примерами этих расслоений являются касательные расслоения, расслоения струй С. Эресмана. Изучению расслоений Вейля посвящены работы А. П. Широкова [2], В. В. Шурыгина [3] и его учеников, И. Коларжа [4], А. Моримото [5] и многих других авторов.

Раздел 1 «Расслоения Вейля» написан А. Я. Султановым, а остальные разделы Я. В. Никитиной.

1. Расслоения Вейля

Пусть A – алгебра А. Вейля над полем R действительных чисел ранга $m+1$, высоты p [6]. Будем считать, что единица алгебры A отождествлена с единицей поля R . Выберем какой-нибудь базис $(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$, где $\varepsilon^0 = 1$, $m = \dim A - 1$ – размерность максимального нильпотентного идеала I алгебры A такого, что факторалгебра A/I изоморфна R . Наряду с A будем использовать пространство A^* линейных форм, заданных на A , со значениями в R . Элементы базиса, дуального базису $(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$, обозначим через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$.

Пусть M – n -мерное связное гладкое многообразие класса C^∞ , а $C^\infty(M)$ – алгебра гладких класса C^∞ функций, заданных на M , принимающих значения в R . Точкой, A -близкой к точке $q \in M$, называется гомоморфизм $j_q: C^\infty(M) \rightarrow A$, удовлетворяющий условию $j_q(f) \equiv f(q) \pmod{I}$. Множество точек, A -близких к $q \in M$, обозначим через M_q^A , а $\bigcup_{q \in M} M_q^A$

обозначим через M^A . Отображение $\pi: M^A \rightarrow M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка (M^A, π, M) – расслоением Вейля. На тотальном пространстве M^A возникают структуры гладких многообразий над алгеброй A и над R .

Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi \in C^\infty(M^A)$ называется вертикальным лифтом, а функция f^A , определенная условием $f^A(j_q) = j_q(f)$ для всех $j_q \in M^A$, называется естественным продолжением функции f в расслоение Вейля M^A .

Предположим, что (U, x^i) – карта гладкого атласа на M . На $\pi^{-1}(U)$ можно определить функции $(x^i)^A = x_0^i + x_\alpha^i \varepsilon^\alpha$, где $\alpha \neq 0$. На M^A функции f^A порождают вещественнозначные функции $f_{(a^*)} = a^* \circ f^A$ для каждой линейной формы $a^* \in A^*$. Функции $f_{(\varepsilon_\sigma)}$, где ε_σ – ковекторы дуального базиса базису ε^σ , где $\sigma = 0, 1, \dots, m$, обозначим через $f_{(\sigma)}$. В координатной окрестности $(\pi^{-1}(U), x_\sigma^i)$ имеем

$$f_{(\alpha)} = (\partial_{j_1} f)_{(0)} x_\alpha^{j_1} + \frac{1}{2!} (\partial_{j_1 j_2} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} x_{\alpha_2}^{j_2} \gamma_\alpha^{\alpha_1 \alpha_2} + \dots + \\ + \frac{1}{p!} (\partial_{j_1 j_2 \dots j_p} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} \dots x_{\alpha_p}^{j_p} \gamma_\alpha^{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

где $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p \neq 0$, а $\gamma_\alpha^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \varepsilon_\alpha (\varepsilon^{\alpha_1} \dots \varepsilon^{\alpha_p})$.

Для векторного поля X на M определим лифты $X^{(a)}$ условиями

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)},$$

где произведение $b^* \cdot a$ определяется однозначно соотношением

$$b^* \cdot a(b) = b^*(a \circ b)$$

для любого $b \in A$. В силу этого определения и линейности операции умножения $\circ$ в алгебре A имеет место равенство

$$a^* \cdot (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 a^* \cdot b_1 + \lambda_2 a^* \cdot b_2.$$

Имеют место также следующие равенства:

$$(a_1^* + a_2^*) \cdot b = a_1^* \cdot b + a_2^* \cdot b,$$

$$(\lambda a_1^*) \cdot b = \lambda (a_1^* \cdot b).$$

Проверим, например, выполнимость одного из этих равенств. Для $c \in A$ получим

$$(a_1^* + a_2^*) \cdot b(c) = (a_1^* + a_2^*)(b \circ c) = a_1^*(b \circ c) + a_2^*(b \circ c) = \\ = a_1^* \cdot b(c) + a_2^* \cdot b(c) = (a_1^* \cdot b + a_2^* \cdot b)(c).$$

Отсюда следует соотношение

$$(a_1^* + a_2^*) \cdot b = a_1^* \cdot b + a_2^* \cdot b.$$

Имеет место следующее тождество:

$$(a^* \cdot b) \cdot c = a^* \cdot (b \circ c).$$

Действительно, для любого элемента $x \in A$ из определения внешней операции умножения ковектора на элемент алгебры и ассоциативности внутреннего умножения $\circ$ следует

$$\begin{aligned} ((a^* \cdot b) \cdot c)(x) &= a^* \cdot b(c \circ x) = \\ &= a^*(b \circ (c \circ x)) = a^*((b \circ c) \circ x) = a^* \cdot (b \circ c)(x). \end{aligned}$$

Следовательно, тождество доказано.

В дальнейшем будем изучать расслоения Вейля порядка 2, т.е. при условии, что алгебра А. Вейля A имеет высоту 2, а именно тензорное произведение двух алгебр дуальных чисел.

2. Тензорное произведение двух алгебр дуальных чисел

Пусть $R(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in R, \varepsilon^2 = 0\}$ – алгебра дуальных чисел над полем R .

Тензорное произведение $R(\varepsilon) \otimes R(\varepsilon)$ порождается элементами $1 \otimes 1, \varepsilon \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon, \varepsilon \otimes \varepsilon$. Обозначим их символами $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ соответственно. Эти элементы являются линейно независимыми, поэтому образуют базис алгебры $R(\varepsilon) \otimes R(\varepsilon) = A$. Составим таблицу умножения базисных элементов алгебры A (табл. 1).

Таблица 1

$\circ$	ε^0	ε^1	ε^2	ε^3
ε^0	ε^0	ε^1	ε^2	ε^3
ε^1	ε^1	0	ε^3	0
ε^2	ε^2	ε^3	0	0
ε^3	ε^3	0	0	0

Здесь $0 = 0_A$ – нулевой элемент алгебры A . $\varepsilon^0 = 1 \otimes 1$ является единицей тензорного произведения. Ее в дальнейшем будем обозначать символом 1. Векторное пространство A^* линейных форм, заданных на A со значениями в поле R , является четырехмерным, его базис составляют линейные формы $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, определенные условиями $\varepsilon_\alpha(a) = a_\alpha$ для каждого элемента $a = a_\alpha \varepsilon^\alpha$ алгебры A . Легко заметить, что имеют место равенства $\varepsilon_\alpha(\varepsilon^\beta) = \delta_\alpha^\beta$.

Кроме того, для любого элемента $x \in A$ имеем

$$a^* \cdot \varepsilon^0(x) = a^*(\varepsilon^0 \circ x) = a^*(x),$$

поэтому $a^* \cdot \varepsilon^0 = a^*$.

Составим таблицу умножения базисных элементов ε^α на линейные формы ε_β дуального базиса $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon^\alpha$. Чтобы найти результаты, подействуем

этими произведениями на базисные элементы алгебры и воспользуемся определением внешнего умножения линейных форм на элементы алгебры A . Тогда получим табл. 2.

Таблица 2

$\cdot$	ε^0	ε^1	ε^2	ε^3
ε_0	ε_0	0	0	0
ε_1	ε_1	ε_0	0	0
ε_2	ε_2	0	ε_0	0
ε_3	ε_3	ε_2	ε_1	ε_0

Действительно, $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon^\alpha(\varepsilon^\beta) = \varepsilon_0(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta) = 0$. При $\alpha \neq 0$ получаем $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon^1(\varepsilon^0) = \varepsilon_1(\varepsilon^1 \circ \varepsilon^0) = 1$; $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon^1(\varepsilon^\alpha) = \varepsilon_1(\varepsilon^1 \circ \varepsilon^\alpha) = 0$. Отсюда

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon^1 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon^2(\varepsilon^\alpha) = \varepsilon_1(\varepsilon^2 \circ \varepsilon^\alpha) = 0.$$

Остальные произведения вычисляются аналогично.

3. Лифты функций с базы в расслоение Вейля M^A

Пусть M^A – расслоение Вейля, где $A = R(\varepsilon) \otimes R(\varepsilon)$, $f \in C^\infty(M)$. Найдем локальное выражение функции f^A . Для этого выберем координатную окрестность (U, x^i) так, чтобы $q \in U$. Тогда имеет место следующее разложение Тейлора:

$$f = f(q) + (\partial_j f)(q)(x^j - q^j) + \frac{1}{2!}(\partial_{jk} f)(q)(x^j - q^j)(x^k - q^k) + \frac{1}{3!}(\partial_{jkl} f)(\xi)(x^j - q^j)(x^k - q^k)(x^l - q^l),$$

где (q) – точка с координатами $x^i(\xi(q)) = q^i + \theta(p)(p^i - q^i)$, $0 < \theta(p) < 1$, для некоторой точки $p \in U$. Здесь $q^j = x^j(q)$ – локальные координаты точки q [6]. Используя это разложение, найдем значение функции f^A в точке j_q :

$$f^A(j_q) = j_q(f) = f(q) + \partial_k f(q)(j_q(x^k) - q^k) + \frac{1}{2} \partial_{kl} f(q)(j_q(x^k) - q^k) \times (j_q(x^l) - q^l) + \frac{1}{3!} \partial_{kls} f(\xi(q))(j_q(x^k) - q^k)(j_q(x^l) - q^l)(j_q(x^s) - q^s). \quad (1)$$

Из определения следует, что $j_q(x^k) \in A$, поэтому $j_q(x^k) = q_0^k + q_\alpha^k \varepsilon^\alpha$ ($\alpha \neq 0$). Так как $j_q(x^k) \equiv x^k(q) \pmod{I}$, то $q_0^k = q^k$. Следовательно, формулу (1) можно записать в следующей форме:

$$f^A(j_q) = f \circ \pi(j_q) + (\partial_k f)_{(0)}(j_q) \left(q_\alpha^k \varepsilon^\alpha \right) + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)}(j_q) \left(q_\alpha^k \varepsilon^\alpha \right) \left(q_\beta^l \varepsilon^\beta \right), \quad (2)$$

где $\alpha, \beta \neq 0$.

Слагаемые, содержащие частные производные третьего порядка, равны нулю, так как высота алгебры $A = R(\varepsilon) \otimes R(\varepsilon)$ равна 2. Поэтому произведение любых трех элементов идеала I равно нулю. В окрестности $\pi^{-1}(U)$ введем координатные функции $(x^i)^A = x_0^i + x_\alpha^i \varepsilon^\alpha$, $\alpha \neq 0$. Тогда

$$(x^i)^A(j_q) = j_q(x^i) = q_0^k + q_\alpha^k \varepsilon^\alpha.$$

С другой стороны, $(x^i)^A(j_q) = x_0^i(j_q) + x_\alpha^i(j_q) \varepsilon^\alpha$. Отсюда $x_0^i(j_q) = q_0^k = q^k = x^k(q) = x^k \circ \pi(j_q)$, поэтому $x_0^i = (x^i)_{(0)}$, а $x_\alpha^i(j_q) = q_\alpha^k$.

Учитывая последние равенства, формулу (2) запишем в следующем виде:

$$f^A(j_q) = f_{(0)}(j_q) + (\partial_k f)_{(0)}(j_q) x_\alpha^k(j_q) \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)}(j_q) \left(x_\alpha^k x_\beta^l(j_q) \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \right), \quad (3)$$

где $\alpha, \beta \neq 0$.

Отсюда получим,

$$f^A = f_{(0)} + (\partial_k f)_{(0)} x_\alpha^k \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} x_\alpha^k x_\beta^l \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta, \quad (4)$$

где по α, β ведется суммирование от 1 до 3.

4. Естественные лифты функций в расслоение Вейля M^A

На расслоении M^A существуют A -гладкая структура и R -гладкая структура. Координатами A -гладкой структуры являются функции вида $(x^i)^A$ в окрестности $\pi^{-1}(U)$, а координатами R -гладкой структуры являются функции x_α^i ($\alpha = 0, 1, 2, 3$).

Пусть $f \in C^\infty(M)$, f^A – A -лифт этой функции, $a^* \in A^*$. Рассмотрим композицию $a^* \circ f^A$. Эта функция определена на M^A и принимает значения в R . В разд. 1 она была названа (a^*) -лифтом функции $f \in C^\infty(M)$ в $C^\infty(M^A)$ и обозначена символом $f_{(a^*)}$. Из этого определения и формулы (4) получим

$$f_{(a^*)}(j_q) = a^* \circ f^A(j_q) = a^* \left(f^A(j_q) \right) = \left(f_{(0)} a^*(\varepsilon^0) + (\partial_k f)_{(0)} x_\alpha^k a^*(\varepsilon^\alpha) + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} x_\alpha^k x_\beta^l a^*(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta) \right) (j_q).$$

Следовательно,

$$f_{(a^*)} = f_{(0)} a^*(\epsilon^0) + (\partial_k f)_{(0)} x_\alpha^k a^*(\epsilon^\alpha) + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} x_\alpha^k x_\beta^l a^*(\epsilon^\alpha \epsilon^\beta).$$

Если a^* является одной из базисных форм ϵ_σ , то получим

$$f(\epsilon_0) = f_{(0)},$$

$$f(\epsilon_\sigma) = (\partial_k f)_{(0)} x_\sigma^k + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} x_\alpha^k x_\beta^l \epsilon_\sigma(\epsilon^\alpha \epsilon^\beta).$$

Для краткости запишем: $f(\epsilon_\sigma) = f_{(\sigma)}$ ($\sigma = 0, 1, 2, 3$). Найдем $f_{(1)}$, $f_{(2)}$ и $f_{(3)}$:

$$f_{(1)} = (\partial_k f)_{(0)} x_1^k + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} x_\alpha^k x_\beta^l \epsilon_1(\epsilon^\alpha \epsilon^\beta) \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Из первой таблицы умножения заключаем, что $\epsilon_1(\epsilon^\alpha \epsilon^\beta) = 0$ для $\alpha, \beta \neq 0$. Следовательно,

$$f_{(1)} = (\partial_k f)_{(0)} x_1^k.$$

Аналогично, из таблицы умножения базисных элементов имеем $\epsilon_2(\epsilon^\alpha \epsilon^\beta) = 0$, поэтому

$$f_{(2)} = (\partial_k f)_{(0)} x_2^k.$$

Поскольку $\epsilon^1 \epsilon^2 = \epsilon^2 \epsilon^1 = \epsilon^3$, $\epsilon^1 \epsilon^1 = \epsilon^2 \epsilon^2 = \epsilon^1 \epsilon^3 = \epsilon^3 \epsilon^1 = 0$, получим

$$f_{(3)} = (\partial_k f)_{(0)} x_3^k + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} (x_1^k x_2^l + x_2^k x_1^l).$$

Сумму $(x_1^k x_2^l + x_2^k x_1^l)$ кратко запишем так: $x_\alpha^k x_{3-\alpha}^l$, $\alpha = 1, 2$. Тогда

$$f_{(3)} = (\partial_k f)_{(0)} x_3^k + \frac{1}{2} (\partial_{kl} f)_{(0)} x_\alpha^k x_{3-\alpha}^l,$$

где по α ведется суммирование от 1 до 2. Заметим также, что $(x^i)_{(\tau)} = x_\tau^i$.

5. Естественные лифты векторных полей

Пусть X – векторное поле, заданное на M ; U – область карты (U, x^i) , $a \in A$; $X = X^i \partial_i$ – локальное представление векторного поля X на U .

В области $(\pi^{-1}(U, x_\sigma^i))$ ($\sigma = 0, 1, 2, 3$) разложим $X^{(a)}$ по векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_\tau^i} = \partial_i^\tau$:

$$X^{(a)} = \tilde{X}_\tau^i \partial_i^\tau.$$

Так как $x_\sigma^i = (x^i)_{(\sigma)} = (x^i)_{(\varepsilon_\sigma)}$, то

$$X^{(a)} x_\sigma^i = (X x^i)_{(\varepsilon_\sigma a)} = (X^i)_{(\varepsilon_\sigma \cdot a)}.$$

С другой стороны, $X^{(a)} x_\sigma^i = \tilde{X}_\tau^k (\partial_k^\tau x_\sigma^i) = \tilde{X}_\tau^i$. Из этих равенств получаем

$$X^{(a)} = (X^i)_{(\varepsilon_\sigma \cdot a)} \partial_i^\sigma. \quad (5)$$

Из определения (a)-лифта векторного поля X следует, что

$$X^{(a_\alpha \varepsilon^\alpha)} = a_\alpha X^{(\varepsilon^\alpha)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} X^{(a_\alpha \varepsilon^\alpha)} f_{(b^*)} &= (Xf)_{(b^* \cdot (a_\alpha \varepsilon^\alpha))} = (Xf)_{a_\alpha (b^* \cdot \varepsilon^\alpha)} = (a_\alpha (b^* \cdot \varepsilon^\alpha)) \circ (Xf)^A = \\ &= a_\alpha \left((b^* \cdot \varepsilon^\alpha) \circ (Xf)^A \right) = a_\alpha (Xf)_{(b^* \cdot \varepsilon^\alpha)} = a_\alpha \left(X^{(\varepsilon^\alpha)} f_{(b^*)} \right) = \left(a_\alpha X^{(\varepsilon^\alpha)} \right) f_{(b^*)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует доказываемое равенство. Таким образом, чтобы найти $X^{(a)}$, достаточно найти $X^{(\varepsilon^\alpha)}$, где $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Обозначим через $X^{(\alpha)}$ векторное поле $X^{(\varepsilon^\alpha)}$. Найдем локальные выражения лифтов $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$.

По формуле (5) находим

$$X^{(0)} = (X^i)_{(\varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon^0)} \partial_i^\sigma = (X^i)_{(\sigma)} \partial_i^\sigma.$$

Более подробно:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (X^i)_{(1)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^2 + (X^i)_{(3)} \partial_i^3 = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + \\ &+ (\partial_k X^i)_{(0)} x_1^k \partial_i^1 + (\partial_k X^i)_{(0)} x_2^k \partial_i^2 + \left((\partial_k X^i)_{(0)} x_3^k + \frac{1}{2} (\partial_{kl} X^i)_{(0)} x_\alpha^k x_{3-\alpha}^l \right) \partial_i^3, \end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2$. Далее, $X^{(1)} = (X^i)_{(\varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon^1)} \partial_i^\sigma$. По таблице умножения элементов ε^α на ε_σ находим, что произведение $\varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon^1$ при $\sigma = 1$ равно ε_1 , а при $\sigma = 3$ равно ε_2 , остальные произведения равны нулю. Поэтому

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^3 = (X^i)_{(0)} \partial_i^1 + (\partial_k X^i)_{(0)} x_2^k \partial_i^3.$$

Аналогично находим $X^{(2)}$:

$$X^{(2)} = (X^i)_{(\varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon^2)} \partial_i^\sigma = (X^i)_{(0)} \partial_i^2 + (X^i)_{(1)} \partial_i^3 = (X^i)_{(0)} \partial_i^2 + (\partial_k X^i)_{(0)} x_1^k \partial_i^3.$$

Для $X^{(3)}$:

$$X^{(3)} = (X^i)_{(\varepsilon_\sigma, \varepsilon^3)} \partial_i^\sigma = (X^i)_{(0)} \partial_i^3.$$

Итак, имеем

$$X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_k X^i)_{(0)} x_\alpha^k \partial_i^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_{kl} X^i)_{(0)} x_\beta^k x_{3-\beta}^l \partial_i^3,$$

где по α ведется суммирование от 1 до 3; по β – суммирование от 1 до 2:

$$X^{(\alpha)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^\alpha + (\partial_k X^i)_{(0)} x_{3-\alpha}^k \partial_i^3 \quad (\alpha = 1, 2), \quad X^{(3)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^3.$$

В частности, из этих формул следуют равенства $(\partial_i)_{(0)}^{(\sigma)} = \partial_i^\sigma$ ($\sigma = 0, 1, 2, 3$).

6. Структурные аффиноры

Структурным аффинором, соответствующим элементу $a \in A$ на расслоении, называется тензорное поле типа $(1, 1)$, обозначаемое символом I^a и действующее по правилу $I^a(X^{(b)}) = X^{(ab)}$.

Особо выделим структурные аффиноры, соответствующие базисным элементам алгебры A : $I^{\varepsilon^0} = I^0$, $I^{\varepsilon^1} = I^1$, $I^{\varepsilon^2} = I^2$, $I^{\varepsilon^3} = I^3$. Легко заметить, что $I^0(X^{(b)}) = X^{(b)}$.

Подействуем аффинорами I^1, I^2, I^3 на $X^{(0)}$. Прежде всего заметим, что $I^\alpha(\partial_i^3) = 0$, где $\alpha = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} I^1(X^{(0)}) &= (X^i)_{(0)} I^1(\partial_i^0) + (\partial_k X^i)_{(0)} x_\alpha^k I^1(\partial_i^\alpha) + \frac{1}{2} (\partial_{kl} X^i)_{(0)} x_\beta^k x_{3-\beta}^l I^1(\partial_i^3) = \\ &= (X^i)_{(0)} \partial_i^{(\varepsilon^1 \cdot \varepsilon^0)} + (\partial_k X^i)_{(0)} x_\alpha^k \left(\partial_i^{(\varepsilon^1 \cdot \varepsilon^\alpha)} \right) = (X^i)_{(0)} \partial_i^1 + (\partial_k X^i)_{(0)} x_2^k \partial_i^3. \end{aligned}$$

Следовательно, $I^1(X^{(0)}) = X^{(1)}$.

Аналогично получим, что

$$I^2(X^{(0)}) = X^{(2)}, \quad I^3(X^{(0)}) = X^{(3)}.$$

Таким образом, лифты $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ векторного поля X получаются из $X^{(0)}$ действием на это поле структурными аффинорами.

7. Естественные лифты линейных форм

Получим лифты линейной формы ω с M на расслоение M^A .

Лифт линейной формы ω определяется следующим условием:

$$\omega_{a^*}^*(X^b) = (\omega(X))_{(a^* \cdot b)}. \text{ Значит,}$$

$$\omega_{(e_\alpha)}(X^{(e^\beta)}) = (\omega(X))_{(e_\alpha \cdot e^\beta)} \cdot e_\alpha \cdot e^\beta = \gamma_\alpha^{\beta\sigma} e_\sigma = \gamma_\alpha^{\beta 0} e_0 + \gamma_\alpha^{\beta 1} e_1.$$

Учитывая координатные представления $\omega = \omega_i dx^i$, $\omega_{(\sigma)} = \tilde{\omega}_{i\sigma}^\tau dx_\alpha^i$ и соотношения $dx_\alpha^i(\partial_j^\tau) = \delta_j^i \delta_\alpha^\tau$, получим

$$\omega_{(\sigma)}(\partial_j^\tau) = \tilde{\omega}_{i\sigma}^\alpha dx_\alpha^i(\partial_j^\tau) = \tilde{\omega}_{j\sigma}^\tau.$$

С другой стороны,

$$\omega_{(\sigma)}(\partial_j^\tau) = \left(\omega(\partial_j^\tau) \right)_{(e_\sigma \cdot e^\tau)} = \gamma_\sigma^{\tau\alpha} (\omega_j)_{(e_\alpha)} = \tilde{\omega}_{j\sigma}^\tau.$$

Таким образом,

$$\omega_{(\sigma)} = \gamma_\sigma^{\tau\alpha} (\omega_j)_{(\alpha)} dx_\tau^j, \quad (6)$$

где $\alpha, \sigma, \tau = 0, 1$.

Воспользовавшись полученной формулой, найдем естественные лифты линейной формы ω при $\sigma = 0, 1, 2, 3$:

$$\omega_{(e_0)} = \omega_{(0)} = \gamma_0^{\tau\alpha} (\omega_j)_{(\alpha)} dx_\tau^j = (\omega_j)_{(0)} dx_0^j,$$

$$\begin{aligned} \omega_{(e_1)} = \omega_{(1)} &= \gamma_1^{\tau 0} (\omega_j)_{(0)} dx_\tau^j + \gamma_1^{\tau 1} (\omega_j)_{(1)} dx_\tau^j + \gamma_1^{\tau 2} (\omega_j)_{(2)} dx_\tau^j + \\ &+ \gamma_1^{\tau 3} (\omega_j)_{(3)} dx_\tau^j = (\omega_j)_{(0)} dx_1^j + (\omega_j)_{(1)} dx_0^j, \end{aligned}$$

отсюда $\omega_{(1)} = (\omega_j)_{(0)} dx_1^j + (\omega_j)_{(1)} dx_0^j$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \omega_{(e_2)} = \omega_{(2)} &= \gamma_2^{\tau 0} (\omega_j)_{(0)} dx_\tau^j + \gamma_2^{\tau 1} (\omega_j)_{(1)} dx_\tau^j + \gamma_2^{\tau 2} (\omega_j)_{(2)} dx_\tau^j + \\ &+ \gamma_2^{\tau 3} (\omega_j)_{(3)} dx_\tau^j = (\omega_j)_{(0)} dx_2^j + (\omega_j)_{(2)} dx_0^j, \end{aligned}$$

т.е. $\omega_{(2)} = (\omega_j)_{(0)} dx_2^j + (\omega_j)_{(2)} dx_0^j$,

$$\begin{aligned} \omega_{(e_3)} = \omega_{(3)} &= \gamma_3^{\tau 0} (\omega_j)_{(0)} dx_\tau^j + \gamma_3^{\tau 1} (\omega_j)_{(1)} dx_\tau^j + \gamma_3^{\tau 2} (\omega_j)_{(2)} dx_\tau^j + \\ &+ \gamma_3^{\tau 3} (\omega_j)_{(3)} dx_\tau^j = (\omega_j)_{(0)} dx_3^j + (\omega_j)_{(1)} dx_2^j + (\omega_j)_{(2)} dx_1^j + (\omega_j)_{(3)} dx_0^j, \end{aligned}$$

т.е.

$$\omega_{(3)} = (\omega_j)_{(0)} dx_3^j + (\omega_j)_{(1)} dx_2^j + (\omega_j)_{(2)} dx_1^j + (\omega_j)_{(3)} dx_0^j = (\omega_j)_{(\alpha)} dx_{3-\alpha}^j,$$

где по α ведется суммирование от 0 до 3.

Заключение

Результаты данной работы в дальнейшем можно использовать при построении горизонтальных лифтов векторных полей и вычислении их комму-

таторов, которые впоследствии потребуются при изучении горизонтальных лифтов линейной связности с базы в расслоение Вейля.

Список литературы

1. **Weil, A.** Theorie des points proches sur les varieties differentiables / A. Weil // Colloque internat. Centre nat. rech. Sci. – Vol. 52. – Strasbourg, 1953. – P. 111–117.
2. **Широков, А. П.** Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами / А. П. Широков // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Т. 12. Проблемы геометрии. – М., 1981. – С. 61–96.
3. **Шурыгин, В. В.** Гладкие многообразия над локальными алгебрами и многообразия Вейля / В. В. Шурыгин // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Т. 73: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – М., 2002. – С. 162–236.
4. **Kolář, I.** Affine structures on Weil bundles / I. Kolář // Nagoya Math. J. – 2000. – Vol. 158. – P. 99–106.
5. **Morimoto, A.** Prolongation of connections to tangent bundles of near points / A. Morimoto // J. Different. Geom. – 1976. – Vol. 11, № 4. – P. 479–498.
6. **Султанов, А. Я.** Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля / А. Я. Султанов // Известия вузов. Сер. Математика. – 1999. – № 9. – С. 64–72.

References

1. Weil A. *Colloque internat. Centre nat. rech. Sci.* Vol. 52. Strasbourg, 1953, pp. 111–117.
2. Shirokov A. P. *Itoги nauki i tekhniki. VINITI. T. 12. Problemy geometrii* [Science and technology results. All-Russian Institute of Scientific and Technical Information. Volume 12. Problems of geometry]. Moscow, 1981, pp. 61–96.
3. Shurygin V. V. *Itoги nauki i tekhniki. VINITI. T. 73: Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Science and technology results. All-Russian Institute of Scientific and Technical Information. Volume 73. Modern mathematics and application thereof]. Moscow, 2002, pp. 162–236.
4. Kolář I. *Nagoya Math. J.* 2000, vol. 158, pp. 99–106.
5. Morimoto A. *J. Different. Geom.* 1976, vol. 11, no. 4, pp. 479–498.
6. Sultanov A. Ya. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. mathematics]. 1999, no. 9, pp. 64–72.

Никитина Яна Владимировна

аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: andrey_9085@mail.ru

Nikitina Yana Vladimirovna

Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Султанов Адгам Яхиевич

кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра алгебры, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Sultanov Adgam Yakhievich

Candidate of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of algebra, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 514.76

Никитина, Я. В.

Расслоение Вейля над тензорным произведением двух алгебр дуальных чисел / Я. В. Никитина, А. Я. Султанов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 17–28.